**Préparation au DS – Corrigé**

Exercice 2 :

1. Soit la fonction définie par . est dérivable sur en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, pour tout

Car pour .

Ainsi est strictement décroissante, donc monotone.

D’autre part, est continue sur et et .

Ainsi, par le théorème de la bijection,

Ce qui se traduit par :

1. Démontrons-le par récurrence sur  :

Pour tout , posons .

Initialisation :

On a , donc est vraie.

Hérédité :

Soit tel que est vraie.

La fonction est décroissante sur (car sa dérivée est négative), on a donc :

Par conséquent, puisque , on a

Donc est vraie

Ainsi, par principe de récurrence, est vraie pour tout .

1. Soient . Quitte à inverser les coefficients, on suppose .

La fonction est continue sur et dérivable sur . De plus,

Car la fonction est croissante sur .

Ainsi, en posant , et en appliquant l’inégalité des accroissements finis,

1. On raisonne encore par récurrence :

Posons pour tout

Initialisation :

On a

Donc est vraie.

Hérédité : Soit tel que est vraie. Alors :

Donc est vraie pour tout .

1. On a , donc

Le théorème des gendarmes permet de conclure que .

Exercice 4 :

Utilisons le binôme de Newton sur les polynômes et  :

Le terme est compensé par les termes de plus haut degré dans les sommes, on a donc :

Il convient alors de faire une distinction de cas selon (la somme va de à , donc la distinction se fait selon si ou pas).

Si , alors , et l degré du polynôme nul est .

Si , on n’a plus qu’a isoler les termes de plus haut degré (dans tous les cas, les termes en se compensent) :

Où est un polynôme de degré strictement inférieur à .

Ainsi :